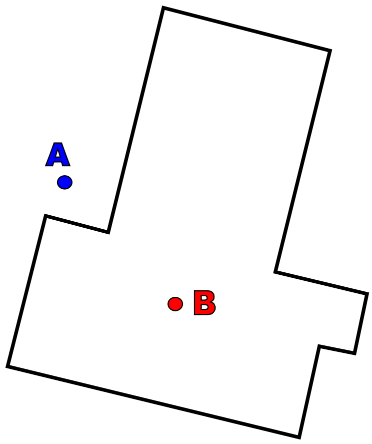
9. Podstawowe narzędzia matematyczne analiz przestrzennych

Niniejszy rozdział służy ogólnemu przedstawieniu metod matematycznych wykorzystywanych w zagadnieniu analizy przestrzennej. Człowiek patrzący na dane przestrzenne przedstawione na mapie (w postaci graficznej) bezbłędnie ocenia położenie punktów względem wielokąta. Przykład rysunku poniżej, na którym bez problemów stwierdzamy, że punkt **A** leży na zewnątrz a punkt **B** wewnątrz wielokąta **Q**. W przypadku kiedy korzystamy z danych w postaci współrzędnych (wykaz współrzędnych obok rysunku), odpowiedzi nie są takie proste i wymagają wielu operacji obliczeniowych i logicznych.



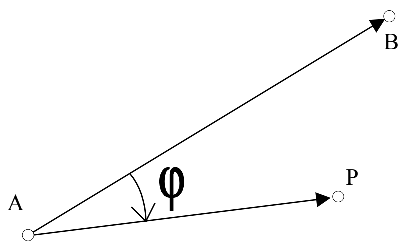

```
Punkty wielokąta
Nr ---------X-- ---------Y--
 1  5613399.248  4661287.044
 2  5613395.479  4661302.143
 3  5613375.501  4661297.209
 4  5613373.441  4661305.470
 5  5613368.028  4661304.187
 6  5613368.702  4661301.214
 7  5613360.444  4661299.332
 8  5613366.870  4661273.000
 9  5613380.442  4661276.294
10..5613378.991  4661282.115

Punkty do sprawdzenia
Nr ---------X-- ---------Y--
 A  5613383.425  4661277.999
 B  5613372.326  4661288.302
```

Poniżej przedstawiono ogólny zarys podstawowych operacji w analizie danych przestrzennych tj. badania położenia punktu względem odcinka, wyznaczania punktu przecięcia się dwóch odcinków oraz badaniu położenia punktu względem wielokąta. Szczegółowe przedstawienie tematyki można znaleźć w pracy [Izdebski 1999].

9.1.1. Wyznaczenie położenia punktu względem odcinka

Pierwszym z analizowanych zagadnień będzie sprawdzenie, po której stronie danego odcinka leży punkt posiadający określone współrzędne XY. Ilustrację zadania przedstawia poniższy rysunek.



Rys. 9.1. Ilustracja zadania położenia punktu względem odcinka

Jednym ze sposobów rozwiązania postawionego zadania jest obliczenie wyznacznika postaci:

$$\det(A,B,P) = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_P & Y_P & 1 \end{vmatrix}$$

Znak wyznacznika det(A,B,P) jest równy znakowi sinusa kąta nachylenia wektora **AP** do wektora **AB**. Otrzymane wartości wyznacznika maja więc następującą interpretację:

- jeżeli det(A.B,P)>0 to oznacza położenie punktu P po prawej stronie odcinka AB,
- jeżeli det(A.B,P)<0 to oznacza położenie punktu P po lewej stronie odcinka AB,
- jeżeli det(A.B,P)=0 to punkty A,B i P są współliniowe.

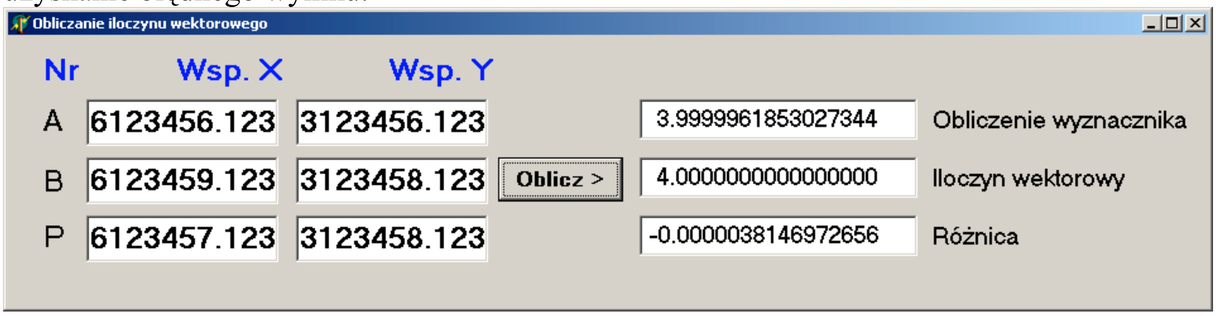
Wyznacznik możemy obliczyć np. metodą Sarussa, która daje następujące rozwinięcie:

$$\det(A,B,P) = X_A * Y_B + X_B * Y_P + X_P * Y_A - Y_A * X_B - Y_B * X_P - Y_P * X_B$$

Innym sposobem określenia położenia punktu względem odcinka (stabilniejszym pod względem numerycznym) jest wykorzystanie iloczynu wektorowego. Zapisując iloczyn wektorowy do postawionego zadania, pamiętając, że punkty leżą na płaszczyźnie otrzymujemy:

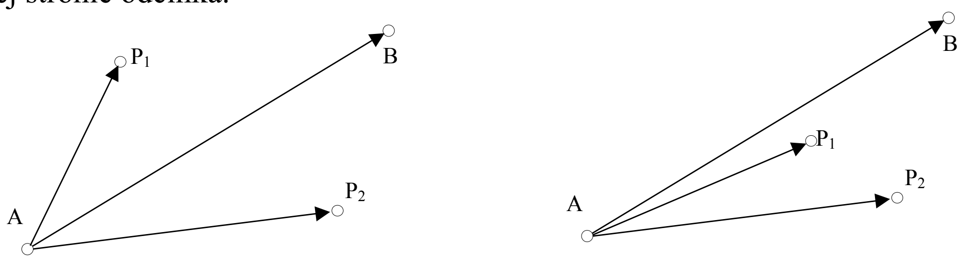
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta X_{AB} & \Delta Y_{AB} & 0 \\ \Delta X_{AP} & \Delta Y_{AP} & 0 \end{vmatrix} = \left[0, \quad 0, \quad \Delta A_{AB} * \Delta Y_{AP} - \Delta X_{AP} * \Delta Y_{AB}\right]$$

Jak wspomniano drugi sposób obliczeń jest znacznie stabilniejszy numerycznie gdyż w obliczeniach operuje się jedynie różnicami współrzędnych zamiast ich pełnych wartości, które dodatkowo podlegają mnożeniu. Ilustracje otrzymanych wyników przedstawiono na poniższym rysunku. Widzimy, że uzyskana wartość bezwzględna rozbieżności z obydwu metod wynosi w przybliżeniu **0.000004,** co w pewnych sytuacjach może powodować uzyskanie błędnego wyniku.



Warto pamiętać, że iloczyn wektorowy AB x AP, ma również interpretację jako podwójne pole trójkąta utworzonego przez punkty A, B, P.

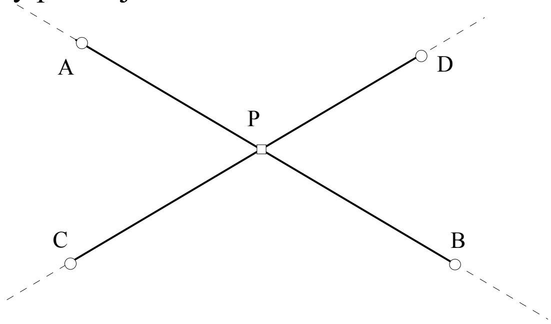
Często w zagadnieniach geometrycznych mamy do zbadania czy dane dwa punkty leżą po tej samej stronie odcinka.



Wykorzystując opisany sposób sprawdzenia położenia punktu względem odcinka wyznaczamy iloczyny skalarne i porównujemy ich znaki. Jeśli znaki są takie same wtedy punkty leżą po tej samej stronie w przeciwnym wypadku leża po różnych stronach odcinka.

9.1.2. Wyznaczenie punktów przecięcia odcinków

Z punktu widzenia wzorów rozwiązujących w niniejszym zadaniu są one analogiczne jak w przypadku zadania wyznaczenia punktu przecięcia dwóch prostych, którego rozwiązanie przedstawiamy poniżej.



Rys. 9.2. Ilustracja zadania przecięcia dwóch prostych określonych dwoma punktami

Parametryczne równanie prostej przechodzącej przez punkty P1 i P2 ma postać:

$$X = X_{P_1} + t \cdot \Delta X_{P_1P_2}$$

$$Y = Y_{P_1} + t \cdot \Delta Y_{P_1P_2}$$

gdzie $t \in (-\infty, +\infty)$. Przy czym na uwagę zasługuje fakt, że w punkcie **P1**($t = 0$), natomiast w punkcie **P2**($t = 1$). Rozwiązanie zadania możemy przedstawić następującymi wzorami:

$$X_P = X_A + t_1 \Delta X_{AB} \qquad Y_P = Y_A + t_1 \Delta Y_{AB}$$

lub

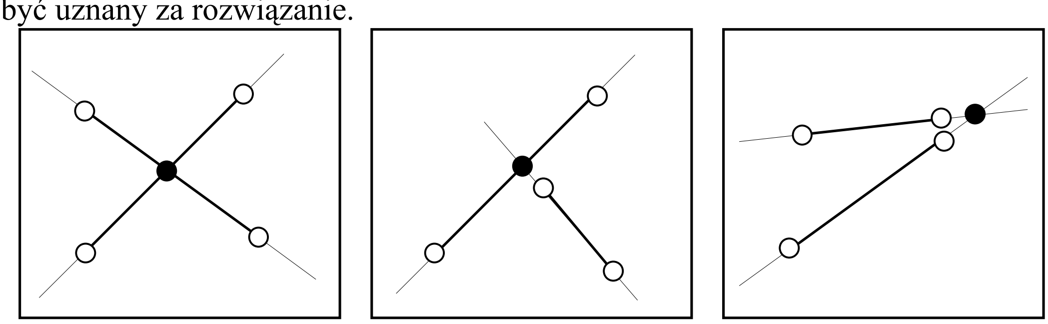
$$X_P = X_A + t_2 \Delta X_{AB} \qquad Y_P = Y_A + t_2 \Delta Y_{AB}$$

gdzie

$$t_1 = \frac{\Delta X_{AC} \Delta Y_{CD} - \Delta Y_{AC} \Delta X_{CD}}{\Delta X_{AB} \Delta Y_{CD} - \Delta Y_{AB} \Delta X_{CD}}$$

$$t_2 = \frac{-\Delta X_{AC} \Delta Y_{AB} + \Delta Y_{AC} \Delta X_{AB}}{\Delta X_{AB} \Delta Y_{CD} - \Delta Y_{AB} \Delta X_{CD}}$$

O ile jednak w zadaniu wyznaczenia punktu przecięcia prostych wystarczające było obliczenie współrzędne punku przecięcia, to w zadaniu niniejszym należy jeszcze dodatkowo sprawdzić, czy wyznaczony punkt przecięcia należy do obu odcinków, co jest konieczne aby mógł być uznany za rozwiązanie.

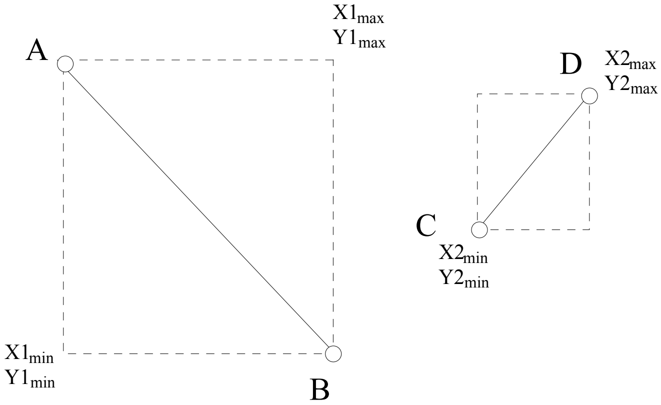


Rys. 9.3. Różne położenie punktu przecięcia dwóch prostych

Wprowadzenie opisanego warunku eliminuje więc rozwiązania leżące na przedłużeniu jednego lub obu odcinków rysunek 9.2 b i c. Z faktu tego wynika również możliwość znacznego usprawnienia procedury obliczającej przecięcia, gdyż jeszcze przed uruchomieniem zasadniczych obliczeń, można dokonać ewentualnego sprawdzenia, czy rozwiązanie istnieje. Możemy w tym celu wykorzystać parametry $\boldsymbol{t}_1$ i $\boldsymbol{t}_2$, z których można stwierdzić czy punkt przecięcia będzie należał do obu przecinanych odcinków. Ma to miejsce jeżeli:

$$(0 \le t_1 \le 1) \ and \ (0 \le t_2 \le 1)$$

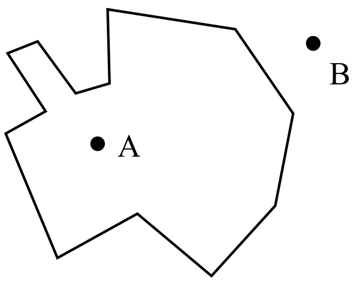
Zanim jednak zaczniemy cokolwiek obliczać powinniśmy sprawdzić relacje prostokątów ograniczających dla odcinków,. co może wyeliminować konieczność wykonywania jakichkolwiek obliczeń.



Rys. 9.4. Przecięcie dwóch odcinków z badaniem prostokątów ograniczających

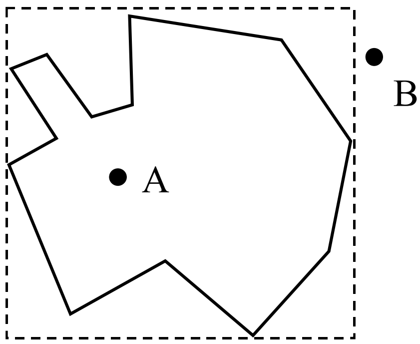
9.1.3. Wyznaczenie położenia punktu względem wielokąta

Ustalanie położenia punktu względem wielokąta podobnie jak obliczanie współrzędnych punktu przecięcia dwóch odcinków, jest jedną z najczęściej wykonywanych czynności w procesie analizy danych przestrzennych. Celem rozpatrywanego zadania jest ustalenie położenia punktu o zadanych współrzędnych P(x,y) względem wielokąta **Q** określonego ciągiem punktów. Zakładamy przy tym, że wielokąt jest wielokątem zwykłym, co oznacza, że jego boki się nie przecinają.



Rys. 9.5. Możliwe przypadki położenia punktu względem wielokąta

Najbardziej znanymi algorytmami sprawdzania położenia punktu względem wielokąta są: algorytm sumy kątów oraz algorytm parzystości. Wymienione algorytmy różnią się między sobą dosyć znacznie. W obydwu przypadkach jednak badanie powinno się rozpoczynać od określenia położenia względem prostokąta ograniczającego. Wystarczy bowiem, że punkt leży poza tym prostokątem aby stwierdzić, że leży również poza wielokątem.



Rys. 9.6. Wstępne badanie położenia punktu wewnątrz wielokąta

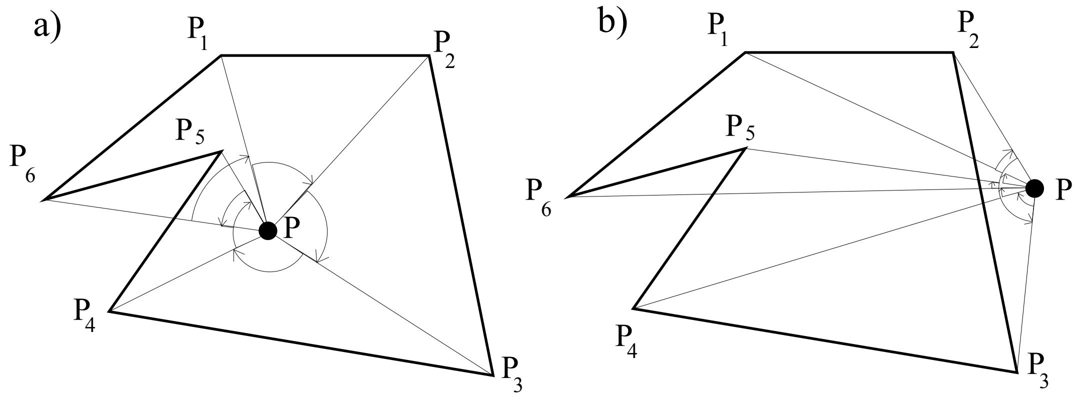
Warunkiem koniecznym bowiem położenia punktu wewnątrz wielokąta jest jego położenie wewnątrz prostokąta ograniczającego.

9.1.4. Algorytm sumy kątów

Algorytm sumy kątów wykorzystuje, do ustalenia położenia punktu względem wielokąta, sumę kątów pomiędzy półprostymi poprowadzonymi z badanego punktu **P** przez wierzchołki wielokąta **P_i**. Obliczaną sumę kątów możemy zapisać jako:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

gdzie α_i jest kątem między półprostymi **PP_i** a **PP_{i+1}**.



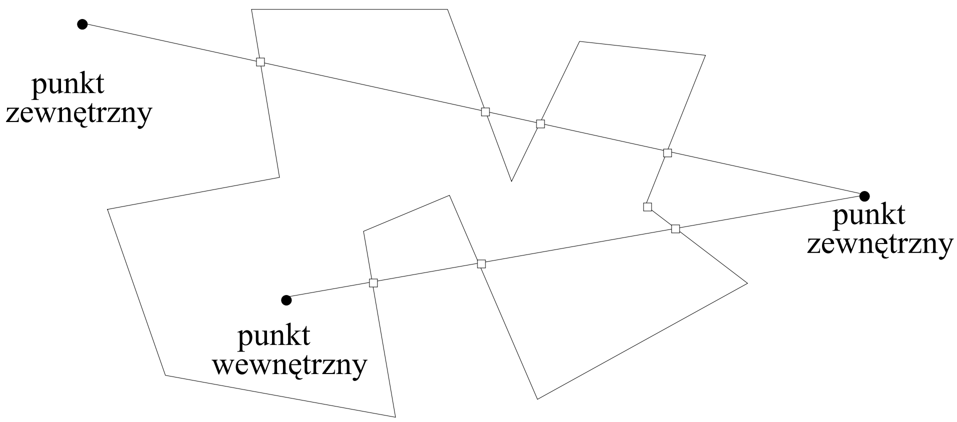
Rys. 9.7. Testowanie położenia punktu względem wielokąta algorytmem sumy kątów:

a) punkt wewnątrz wielokąta; b) punkt na zewnątrz wielokąta

Jeśli punkt znajduje się wewnątrz wielokąta wtedy **S=360°** (rysunek 8.3a) w przeciwnym wypadku **S=0°** (rysunek 8.3b). Oczywiście podane wartości sumy kątów należy sprawdzać w pewnym przedziale dokładności numerycznej ±ε. Obliczane kąty α_i traktujemy jako dodatnie, jeśli uporządkowanie ramion jest zgodne z ruchem wskazówek zegara i jako ujemne jeśli jest kierunek uporządkowania jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

9.1.5. Algorytm parzystości

Algorytm parzystości opiera się na założeniu, że jeżeli jeden z punktów leży na zewnątrz wielokąta, a drugi wewnątrz, wtedy odcinek łączący te punkty przecina boki wielokąta nieparzystą liczbę razy. Jeżeli natomiast oba punkty leżą na zewnątrz wielokąta, odcinek je łączący albo nie przecina żadnego boku, albo przecina je parzystą liczbę razy. Zasada algorytmu przedstawiona jest na poniższym rysunku 8.4.



Rys. 9.8. Ogólna zasada działania algorytmu parzystości